DOCUMENTO 2

2.) CHARNAY, R. (1990/91)
"Del análisis de los errores en matemática a los dispositivos de remediación; algunas pistas...".
Equipo de investigación en didáctica de las matemáticas INRP. En: Grand N, N° 48, pp37-64. Francia

ANALISIS DE LOS ERRORES EN MATEMÁTICAS A LOS DISPOSITIVOS DE REMEDIACION: ALGUNAS PISTAS...

Roland **CHARNAY**
Equipo de investigación en didáctica de las matemáticas INRP
Michel MANTE
IREM de Lyon
En: *Grand N,* n°48 pp. 37-64, 1990-1991

Traducción: B. Capdevielle; L. Várela; P. Willson. Para el Programa de Transformación de la Formación Docente. Dirección Nacional de Programas y Proyectos. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.

El texto que sigue es una modesta contribución a un vasto problema que nos concierne a todos en tanto docentes: el de la búsqueda de las causas de los errores producidos por los alumnos y la puesta en práctica de situaciones para remediarlos.

Los errores que nos interesan aquí son los que parecen significativos, es decir, los que poseen las siguientes características:

* **son** "reproducibles" en el alumno; tienen cierta persistencia, y, **no** pueden deberse, pues, a la distracción;
* **no son.** aislados,, pueden ponerse en relación con otros, con los cuales forman una suerte de red o de sistema de errores.

Retomando el juego de palabras de G. PERROT (1989), podemos, en este caso, hablar de co-errores y de coherencia de estos errores [en francés *co-errance* (co-errores) y *cohérence* (coherencia) tienen la misma pronunciación, T.].

La palabra "remedio" plantea un problema pues, para muchos de nosotros, deja entender que a cada error puede encontrársele un remedio, visión que nos parece irreal en la medida en que esos errores están constituidos en redes que se apoyan en una lógica y en concepciones que el alumno se ha construido. Generalmente, una simple situación (poción mágica) no bastará para llevarlo a abandonar esta lógica y estas concepciones.

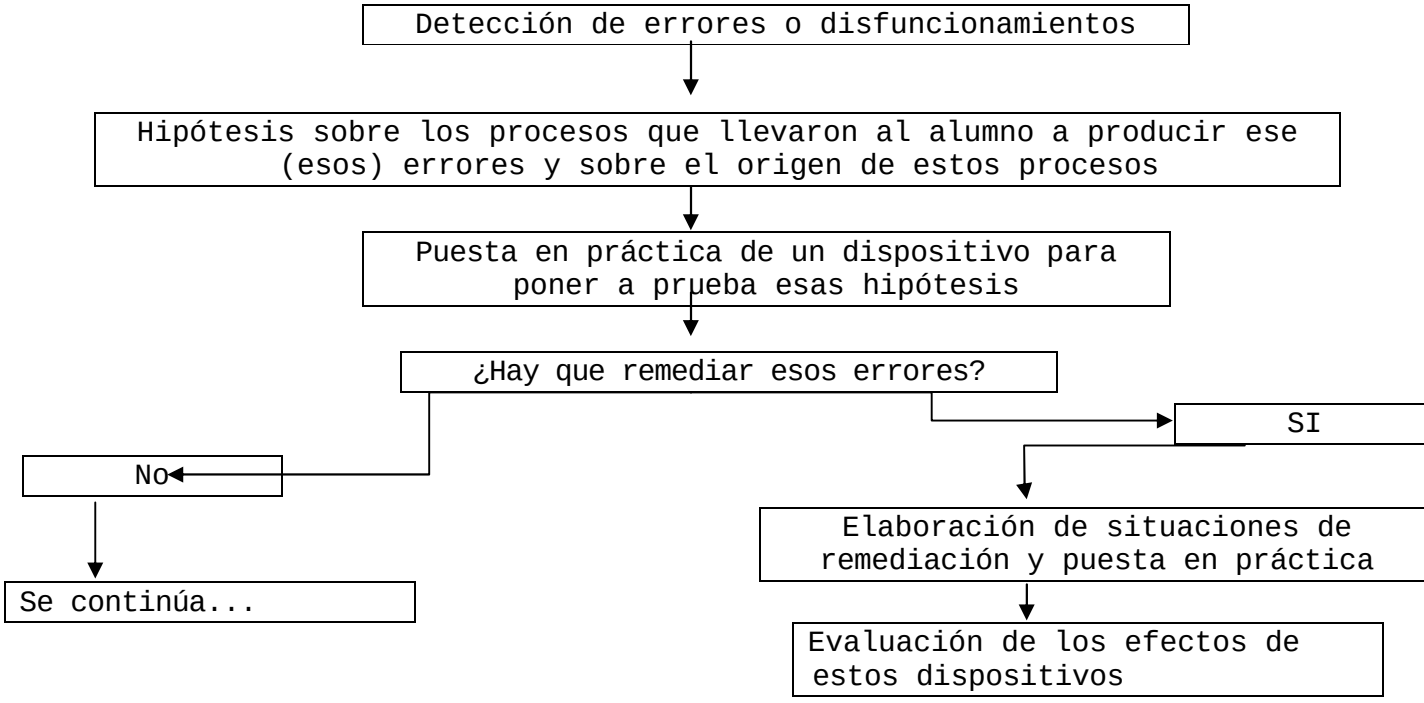
Sin embargo, seguiremos utilizando esta palabra, pero en el sentido de "remediación" (nueva mediación entre el saber y el alumno); más precisamente, **llameremos remediación a todo acto de enseñanza cuyo objetivo es permitir que el alumno se apropie de los conocimientos (saber, saber-hacer, saber-ser, competencias metodológicas) después de que una primera enseñanza no le ha permitido hacerlo en la forma esperada.**

Para poner en práctica un dispositivo de remediación, proponemos el organigrama expuesto más abajo.

Ahora explicitaremos cada una de esas etapas.

Precisemos ante todo que **el análisis** que hacemos de un error es una función directa, de nuestra **concepción del aprendizaje,** es decir de las respuestas que damos a la pregunta: "¿Cómo aprenden los alumnos?". **En** cuanto al **dispositivo de remediación,** es función de nuestra **concepción de la enseñanza,** es decir de las respuestas que damos a la pregunta: "¿Qué es lo que debe caracterizar las actividades que propongo a los alumnos para facilitar el aprendizaje?". A menudo comprobamos que las concepciones del aprendizaje subyacentes al análisis de errores son diferentes de las concepciones de la enseñanza subyacentes al

dispositivo de remediación. Este punto fue puesto de relieve por N. MILHAUD (1980).


Detección de errores o disfuncionamientos
Hipótesis sobre los procesos que llevaron al alumno a producir ese (esos) errores y sobre el origen de estos procesos
Puesta en práctica de un dispositivo para poner a prueba esas hipótesis
¿Hay que remediar esos errores?
SI
No
Elaboración de situaciones de remediación y puesta en práctica
Se continúa...
Evaluación de los efectos de estos dispositivos

I. PRIMERA ETAPA: DETECCIÓN DE LOS ERRORES

Detectamos los errores en diversas situaciones: deberes escritos, borradores, observaciones del alumno que trabaja individualmente o en grupos, charlas con el alumno...

Una vez hecha esta detección, se plantea una pregunta: "¿Este error es verdaderamente un error?". En efecto, detectar un error supone la existencia de una respuesta "norma".

¿El producto norma está bien explicitado? En matemáticas, se puede responder generalmente por la afirmación; por ejemplo, si un alumno escribe que 2,5+3,7=5,12 todo profesor de matemáticas reconocerá aquí un error, pero de todos modos hay que ser consciente de que, para ciertas áreas, esta norma no es claramente explicitable: este es el caso, por ejemplo, de la demostración, de las redacciones de soluciones de problemas, de las construcciones de figuras geométricas.

Por otra parte, las experiencias de docimologia (NOIZET,. CAVERNÍ, 1978) muestran que es en realidad respecto del "producto esperado" que .detectamos los errores. Esto último toma en cuenta, desde luego, el producto norma, pero también otras informaciones, por ejemplo, el autor del producto,_ las condiciones de realizacion.de ese producto (¿se trata de un trabajo en tiempo limitado o no, de un trabajo hecho en casa o no?)... Este producto esperado no es, pues, igual para todos. Todo esto justifica por tanto la pregunta: **"¿Este error es un error?".**

II. SEGUNDA ETAPA: HIPÓTESIS SOBRE LOS PROCESOS QUE LOS ALUMNOS UTILIZARON PARA PRODUCIR ESOS ERRORES Y ORIGEN DE ESOS PROCESOS

El análisis y la interpretación de los errores y su origen supone la referencia a un marco teórico (suerte de grilla de lectura), que está ampliamente influida por nuestras concepciones del aprendizaje y de las matemáticas (A. BOUVIER,

1981).

2.1. Dos perspectivas clásicas

Estas dos perspectivas remiten a des concepciones corrientes del aprendizaje: la concepción "común" y la concepción conductista.

2.1.1. La. concepción "común" considera que el aprendizaje está basado en la escucha, la observación, la imitación, la reproducción del modelo enseñado. Hay _que escuchar bien, aprender bien, memorizar bien y entrenarse para poder registrar, luego reproducir y por último utilizar los conocimientos. La calidad del aprendizaje está así condicionada por la de la transmisión: el buen maestro es aquél que explica bien, que sabe ilustrar su discurso con manipulaciones, esquemas.

En esta perspectiva, el análisis del error se hace en términos de falta, en términos de anomalía. Uno se limita a hacer la constatación de que el alumno no ha adquirido el sentido de la sustracción, que no sabe utilizar la proporcionalidad, que no sabe comparar los decimales, que olvida siempre lo que se lleva en la adición...

La responsabilidad del error en entonces atribuida al alumno (que no ha escuchado o no ha aprendido...),"rara vez al docente (que ha explicado mal).

En esta concepción, la respuesta es simple: hay que alentar al alumno a que trabaje (mediante recompensas o sanciones), repetir las explicaciones, proponer nuevos ejercicios de entrenamiento (sobre todo para las cuestiones técnicas), multiplicar los problemas-tipo (para la adquisición del "sentido" de la proporcionalidad, por ejemplo).

2.1.2. Otras, concepción, influida por el conductismo y que se encuentra plenamente expresada en la pedagogía por objetivos, se basa en la idea de que, para hacer que el alumno pase de un estado de conocimiento a otro, hay que disponer etapas intermedias graduales, yendo de lo simple a lo complejo, recortando las competencias globales en competencias elementales, y distinguiendo también diferentes niveles para estas competencias (detectados por ejemplo mediante taxonomías).

En esta perspectiva, se distinguirán (por ejemplo} diferentes tipos y niveles de errores:

- Dominio de los conocimientos, distinguiendo los conocimientos declarativos (los saberes: definiciones, reglas, teoremas...) y los conocimientos procesales (los saber-hacer: técnicas, algoritmos...) .
- Disponibilidad de. los conocimientos: capacidad para movilizarlos en el momento oportuno, para reinvestirlos...
- Capacidades lógicas, razonamiento: gestión de los datos de un problema, articulación de subproblemas, conducción de un procedimiento' por la prueba y el error.

Esta grilla permite una descripción más fina de los errores. Por ejemplo, un alumno sabe completar una tabla de proporcionalidad (saber-hacer), pero no sabe aplicarla en un problema (razonamiento); otro alumno sabe enunciar las propiedades de la mediatriz (saber), pero no "piensa" movilizar una mediatriz particular para probar que un triángulo es isósceles (disponibilidad).

A partir de allií es posible una intervención diferenciada, pero los medios utilizados estarán en relación con las concepciones del aprendizaje: refuerzo, regreso a etapas anteriores, descomposición en etapas suplementarias "más simples", cuestionamiento de la progresión...

Por ejemplo, para los errores "de saber", se pedirá al alumno que aprenda (o

vuelva a aprender) sus lecciones; para los errores de "saber-hacer", se le propondrán ejercicios de entrenamiento graduales; para los errores "de disponibilidad", se multiplicarán los problemas-tipo; para los errores "de lógica o de razonamiento", se intentará explicar un procedimiento o hacerlo funcionar sobre ejemplos más simples... pero ¡uno se remitirá en lo esencial a la "madurez" del alumno!

2.2. La **perspectiva constructivista**

En las dos perspectivas precedentes, los errores son considerados como accidentes que serían posibles evitar... si el alumno escuchara mejor, si se entrenara, si mejorara su razonamiento. . . o si el docente avisara su progresión, mejorara sus explicaciones o incluso si dispusiera ejercicios mejor escalonados...

En la perspectiva constructivista, el error es la expresión de una forma de conocimiento. "El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar como se cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela como erróneo, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos ni imprevisibles; están constituidos como obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido". (BROUSSEAU, 1983).

Recordemos brevemente algunas hipótesis características de esta concepción constructivista del aprendizaje, sostenidas por el conjunto de los investigadores en didáctica de las matemáticas. Las principales hipótesis de-aprendizaje, surgidas de los trabajes sobre psicología cognitiva (PIAGET) y-sobre psicología social, subrayan la importancia de la acción del alumno (en el sentido de la resolución de problemas), la importancia del proceso dé "desequilibrios-reequilibraciones" (acompañado por una reorganización de los conocimientos), en el cual .las concepciones del alumno desempeñan un rol determinante, y finalmente, la importancia de las situaciones de conflictos socio-cognitivos entre alumnos que trabajan juntos o se comunican a distancia. El análisis de los errores, y sobre todo el de su origen, puede entonces servir de referencia al sistema didáctico con sus tres polos (maestro, alumnos, saber matemático) y la relación ternaria que los une.

Este sistema puede servir de marco para analizar a la vez **la elección de las tareas que el maestro propone a los alumnos, la interpretación de sus tareas por parte de los alumnos,** los procesamientos que ponen en práctica y los errores que producen.

Así, **una tarea propuesta por el maestro** puede analizarse en función:

- de ciertas características individuales del maestro (en especial sus concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza); estamos entonces en el polo M (maestro);
- del recorte del saber matemático operado por el maestro, objetivos específicos que privilegia; estamos entonces en el eje "M-S" (maestro-saber);
- de la representación que tiene el maestro de los conocimientos actuales de los alumnos; estamos entonces en el eje A-S (alumnos-saber) (o al menos en la representación que de él se hace el maestro).

Este tipo de análisis puede ser útil en el momento de la elaboración de los dispositivos de remediación.

De la misma manera, **la representación que** un **alumno se construye de la tarea propuesta,** luego los procesamientos que pone en marcha y las respuestas que aporta y sobre todo los procesamientos y las respuestas erróneas, pueden

analizarse en función:

- de ciertas características individuales del educando (polo A);
- de sus conocimientos actuales y de las concepciones que ha elaborado a propósito de los saberes que pueden (según él) movilizarse en la tarea propuesta (eje A-S);
- de la decodificación que hace de la situación en la que se encuentra, en clase, con un maestro determinado, frente a un tipo de tarea particular, decodificación influida por el contrato didáctico (el eje M-A es aquí preponderante).

Proponemos analizar e interpretar los errores según esta óptica, sin embargo, es necesario señalar ante todo que **un error (o más bien una red de errores) suele ser susceptible de varios análisis e hipótesis de interpretación que a menudo tienen que ser sometidas a validación por nuevas investigaciones.**

2.2.1. Análisis en relación con características del educando

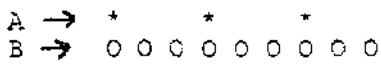
Serán evocados sucesivamente:

- los errores que pueden deberse a limitaciones del sujeto en un momento dado de su desarrollo intelectual;
- los errores que pueden deberse a limitaciones en el campo del procesamiento de la información
- los errores que pueden deberse a características individuales particulares de un alumno.

a) Errores de origen ontogénico

Estos errores pueden deberse a ciertas limitaciones del sujeto en determinados momentos (ciertos estadios, según PIAGET) de su desarrollo

***Ejemplo** 1:* Hasta los 6-7 años, la noción de cantidad numérica no se distingue de la de lugar ocupado, y el alumno afirmará que hay más objetos en A que en B:



***Ejemplo** 2:* algunos alumnos de 2º grado (7 años) responden mediante una adición al problema siguiente: "Juan acaba de jugar un partido de bolitas. Ganó 6 bolitas durante el partido. Al final del partido tiene 17 bolitas. ¿Cuántas bolitas tenía al comienzo del partido?" En un problema de este tipo, la solución experta (recurso a la sustracción) supone un cálculo relacional (compensación de una transformación positiva mediante una transformación negativa para reencontrar el estado inicial) que supone la reversibilidad operatoria, no siempre construida a esa edad.

Ejemplo 3: Lo mismo, para el siguiente problema: "Vicente juega dos partidos de bolitas. Durante el primer partido, gana 8 bolitas. Luego juega un segundo partido. Después de los dos partidos, nota que ha perdido en total 2 bolitas. ¿.Qué pasó en el segunde partido?" Algunos alumnos de 14-15 años responden calculando 8 - 2. Se dejaron influir sin duda por la palabra "perdido", pero puede también considerarse que una resolución correcta supone razonar en términos de transformaciones (sobre estados ficticios), lo que es difícil antes del acceso al estadio del pensamiento formal.

Los dos últimos ejemplos subrayan cuan peligroso es hablar de "sentido" de la adición o de la sustracción, en tanto que el dominio completo de las estructuras aditivas se elabora a lo largo de un tiempo muy largo (más de una decena de años según G. VERGNAUD, 1986). Hay que subrayar aquí la importancia del "largo plazo"

en los aprendizajes.

b) Errores debidos a limitaciones de las capacidades en el dominio del procesamiento de la información

Algunos psicólogos cognitivistas intentaron modelizar el funcionamiento del sujeto en las tareas de resolución de problemas. Para hacerlo, llegaron a distinguir dos tipos de memoria. Por una parte, la memoria permanente (o memoria a largo plazo), de gran capacidad, que es durable, pero en la cual una información almacenada no puede recuperarse fácilmente. Por otra parte, la memoria de trabajo utilizada para el almacenamiento temporario de informaciones y el ejercicio de actividades no automatizadas (inferencias, actividades de control, búsqueda en memoria a largo plazo...); esta última tiene una doble limitación: de capacidad (débil rango mnésico) y de duración (almacenamiento transitorio, borrado rápido de las informaciones). En particular, si la memoria de trabajo está movilizada por actividades cognitivas no automatizadas, la capacidad de almacenamiento está reducida, debido a la competencia que se establece entre actividades de procesamiento y actividades de auto-repetición mental que apuntan a asegurar el mantenimiento de la información en la memoria (J.F, RICHARD, 1982).

Evocamos así la idea de "carga mental de trabajo" que puede volverse excesiva debido a diversos factores:

- la gestión simultánea de diversas actividades,
- la falta de procedimientos automatizados y, por tanto, la necesidad de reconstruirlos parcial o totalmente,
- la fijación del sujeto en algoritmos costosos, (división por sustracciones sucesivas, por ejemplo),
- la falta de “hechos” disponibles en la memoria a largo plazo (resultados numéricos, esquemas de problemas...), etc.

Pueden darse algunos ejemplos de dificultades interpretables en esta perspectiva.

***Ejemplo 1: cálculo* mental**

Consideremos para un alumno de 3o grado (8 años), un cálculo del tipo 36+24. Si el cálculo es propuesto mentalmente, el alumno debe almacenar en la memoria de trabajo (MT) los dos números y la operación. Debe utilizar esta MT para producir, utilizando un procedimiento almacenado en la memoria a largo plazo (MLP), la descomposición apropiada de 36 (30 + 6) considerando que el segundo número termina en 4 (lo que exige también un procesamiento); sucede lo mismo para la descomposición de 24 (20 + 4). Estas dos descomposiciones deben conservarse en la MT; luego hay que recuperar en MLP (si están disponibles) los resultados de 4 + 6 y de 30 + 20, de lo .contrario hay que reconstruirlos, lo que supone un procesamiento en MT, etc. Puede verse cómo la sobrecarga cognitiva puede intervenir en la medida en que ciertos resultados numéricos no estén disponibles en la MLP o bien algunos procedimientos no estén automatizados.

Ejemplo 2: resolución de problemas

J.-F. RICHARD (1982) muestra cómo las limitaciones de la memoria de trabajo pueden manifestarse en la fase de comprensión del enunciado.

La lectura del enunciado implica una actividad de desciframiento del texto y una actividad de selección, de codificación y de almacenamiento de la información pertinente. Si la lectura no está automatizada, puede ocasionar una

carga, mental importante que compite con la actividad de almacenamiento. Del mismo modo, si el alumno no sabe qué datos debe seleccionar, estará tentadora retener demasiadas cosas a riesgo de saber que su capacidad mnésica se ve superada, o bien de aligerar la lectura utilizando reglas del contrato o palabras inductoras.

La resolución supone procesamientos (que tal vez no estén automatizados por completo), el mantenimiento de resultados intermedios y de sub-objetivos a alcanzar, controles sobre la ejecución del procedimiento de resolución elegido y sobre los algoritmos que éste implica. Todas estas tareas movilizan la memoria de trabajo, cuyos límites de capacidad pueden ser alcanzados rápidamente, de allí el "olvido" de ciertos datos, del objetivo a alcanzar o del plan inicialmente previsto.

Tanto durante la actividad de comprensión y de representación del problema como durante su resolución, la recuperación en la memoria a largo plazo se relaciona con diferentes tipos de conocimiento: las experiencias sociales (situaciones de referencia) y escolares (problemas de naturaleza semejante ya encontrados, esquemas de solución adquiridos, algoritmos de cálculo...). Ahora bien, la recuperación en MLP parece muy dependiente de la diferencia que puede existir entre el contexto en el que la información ha sido registrada y aquél en que su recuerdo es necesario (idea de contextualización de los conocimientos almacenados); por ejemplo, el verbo "sacar" o sus sinónimos son Índices muy fuertes para evocar la sustracción. J.F. RICHARD cita el ejemplo siguiente (nivel 3o grado): "Para llevar a los niños de paseo, se hace venir unos ómnibus; en cada ómnibus hay 30 lugares; hay 112 niños para llevar; ¿cuántos ómnibus hacen falta?". El enunciado comporta pocos índices habitualmente presentes en las situaciones de división (tales como repartos, distribuciones...); el alumno no reconoce el modelo experto apropiado, y tal vez movilizará un procedimiento próximo a la acción, y más difícil de controlar (adiciones sucesivas o ensayos de múltiplos, por ejemplo).

Ejemplo 3:

Si un conocimiento es elaborado de manera demasiado contextualizada (o en un solo contexto), es grande el riesgo de que el alumno le asocie índices no pertinentes que, para él, serán sin embargo características de conocimiento. Así, la "frecuentación escolar" de rectángulos bien proporcionados puede: conducir a que el alumno se niegue a considerar una banda estrecha como un rectángulo. El índice "relación de dimensiones" no es pertinente, pero sin embargo el alumno lo retiene como característica.

Acerca de todas las dificultades que puede encontrar un alumno confrontado a la resolución de un problema concreto, y acerca de los orígenes posibles de errores que puede producir, puede consultarse el artículo de M. MANTE (1990} •

c) Errores debidos a características personales del individuo

* **La representación que el alumno tiene de las matemáticas** puede ser la causa de un rechazo de esta disciplina y explicar ciertos errores. Aquí encontramos el trabajo de investigación de Jacques NIMIER, quien demostró que un *"vivido afectivo muy importante está ligado a las matemáticas"* y que ***"el** inconsciente se sirve a veces de las matemáticas para hacer de ellas un objeto peligroso [. . .] objeto que puede considerarse como un obstáculo en el desarrollo de las personalidad* [de los alumnos]" (NIMIER, 1973). De este modo, algunos alumnos llegarán a poner en práctica un sistema de defensa que consiste en desear inconscientemente fracasar en matemáticas.

* **La representación que el alumno tiene de sí mismo como matemático** también puede ser la causa de errores. R. NOIRFALISE (1990) demostró que un

"buen"[1] alumno frente a un error desarrollará un programa de procesamiento que le permitirá lograr el éxito las veces sucesivas. Por el contrario el "mal" alumno frente a un error desarrollará un programa de procesamiento que lo conducirá a abandonar la búsqueda, lo que tendrá por consecuencia reforzar la imagen que tiene de sí mismo en su relación con las matemáticas: "Soy malo". Frente a una misma situación, un alumno que tiene una relación "positiva" con el saber aprovechará plenamente su error, en tanto que un alumno que se considera "malo" se encontrará confortado en su juicio. También el docente puede reforzar esta situación: ¿no tenemos tendencia, espontáneamente a analizar los errores de un "buen" alumno en términos de "distracción" y el del alumno "flojo" en términos de "dificultades" o de "carencias"? (Véase a este respecto M.L. SCHUBAÜER-LEONI, 1989).

Nos contentaremos con citar *grosso modo* cierto número de características que son más o menos específicas de un individuo determinado y que pueden contribuir a la explicación de ciertos errores:

* **la representación que el alumno tiene de** la **escuela** con respecto a su proyecto personal o el de sus padres;
* **la lentitud en el trabajo,** falta de habilidad manual, falta de organización (por ejemplo, del espacio de trabajo);
* **los problemas de orden psico-afectivo,** por ejemplo, del alumno que responde correctamente en situación ordinaria, pero que fracasa en situación de control;
* **las capacidades metacognitivas,** en particular en lo que respecta a la puesta en práctica de estrategias de control;

* **la dificultad para "salir del marco",** por ejemplo, para agregar elementos a la figura inicial en geometría;
* **conocimientos** o **competencias no específicamente matemáticos mal dominados:** lectura, expresión escrita u oral, conocimientos sobre el mundo, experiencias sociales...

2.2.2. Análisis en relación con las concepciones del alumno con respecto a un saber determinado (eje A-S)

Es útil detenerse aquí un instante para precisar lo que entendemos por "concepción".

Para un concepto determinado, la noción de concepción representa el conjunto de los **conocimientos locales** (correctos o no) que son atribuidos al alumno y que permiten dar cuenta del funcionamiento real del alumno (sus conductas, sus procedimientos, sus respuestas) y explicarlo.

Se trata, pues, de una modelización, de hipótesis hechas por el observador y **no** de conocimientos explícitos del alumno. Todo sucede como si... el alumno dispusiera de los conocimientos que se le acuerdan. La modelización es pertinente en la medida en que permite describir ciertas producciones del alumno y predecir algunas de sus respuestas. En este sentido es interesante considerar una red de errores compatibles con una misma concepción.

Debe notarse también que una sola concepción no siempre permite explicar todas las respuestas de un alumno, y que todo sucede a veces como si éste movilizara,

[1] Es la "institución la que le devuelve esa imagen de sí en su relación con el saber (R. NOIRFALISE, 1990).

según la actividad propuesta, diferentes concepciones. Esto puede relacionarse con las dificultades de transferencia antes evocadas (2.2.2., por ejemplo).

Las concepciones de los alumnos **se** estudiaron particularmente para el caso de los números decimales (G. BROUSSEAU, 1980, 1981).

Consideremos los errores siguientes:

2,4 x 3,2 = 6,8•
$3,4^2$ = 9,16
0,3 x 0,3 = 0,9
7,4 < 7,16
3,25 es el número que sigue a 3,24

Estas respuestas pueden explicarse considerando que el alumno se representa un decimal como compuesto por **dos** enteros independientes separados por, **una** coma y sobre los cuales hay que actuar separadamente, comenzando por el de la izquierda.

El alumno ya utiliza reglas de acción (implícita), "teoremas en acto" (G. VERGNAUD) que son compatibles con esta concepción, por ejemplo: "para multiplicar dos decimales, se multiplican separadamente las partes enteras y las decimales".

Estas reglas Vienen en general un campo de eficacia, de éxito... que refuerza la concepción en el alumno. Así, la regla citada da un resultado correcto para 0,4 x 0,4. De igual modo, la regia de comparación (se comparan ante todo las partes enteras, luego, en caso de igualdad, las partes decimales) es "eficaz" para todos los decimales que tienen el mismo número de cifras después de la coma, ¡lo que suele suceder a menudo!

En su artículo sobre el valor absoluto, A. DUROUX (1983) señala dos concepciones que pueden ser la causa de respuestas erróneas sobre esta noción: el número vinculado a una medida (la más generalizada), y la del número relativo compuesto de un signo y de un número, concepciones que no permiten ejercer control sobre los algoritmos utilizados (por ejemplo |2+x| considerado como igual a 2+x si x > 0 y -2-x si x < .0) o que pueden explicar errores como |-a|=a y respuestas correctas como |7| = 7 y |-6| = 6.

Del mismo modo, la idea de perpendicular está a menudo vinculada con la de recta "que cae" sobre otra horizontal (o próxima a la horizontal) y que la corta.

Esto explica que las rectas siguientes no sean consideradas como perpendiculares.

Algunas de estas concepciones se convierten en obstáculos en el proceso de adquisición de los conocimientos. Esta idea de obstáculo está tomada de BACHELARD, quien la puso en evidencia en el marco de la epistemología de las ciencias (y en particular de las ciencias físicas). BROUSSEAU (1983) retomó esta noción en el marco de la didáctica de las matemáticas y DUROUX precisó las condiciones que debía satisfacer un conocimiento para poder ser declarado un obstáculo (distinguiéndolo así de la idea vaga de dificultad.)

- Se trata de un conocimiento que tiene un campo de eficacia: permite obtener el resultado exacto para ciertos valores.
- Este conocimiento provocará errores específicos cuando se intente adaptarlo a otros valores de variables.
- El obstáculo es un conocimiento estable, que resiste a las modificaciones, es decir que su rechazo representa cierto costo para el alumno.

- El obstáculo sólo podrá ser superado en situaciones específicas de rechazo; éste se transforma entonces en constitutivo del saber.

La concepción de número ligado a una medida puede también ser considerada una concepción-obstáculo, que funciona para los naturales y cuyo rechazo permite definir los números negativos.

A continuación, intentamos, en el marco del sistema didáctico, precisar los orígenes posibles de estas concepciones.

a) Concepciones en relación con obstáculos de origen epistemológico (polo S)

Se trata de concepciones-obstáculo que pueden encontrarse en la historia del concepto, y cuyo rechazo ha contribuido a la elaboración de este concepto por parte de los matemáticos.

Así, la concepción de los números como expresión de una medida constituyó un obstáculo para la elaboración del concepto de número negativo durante más de 15 siglos, y puede explicar algunos errores en el manejo de los valores absolutos (como |-a|=a o de los productos en Z).

Los alumnos evocan la "mitad de un recta" (ubicando un punto en medio del segmento que la representa) o consideran que por dos puntos se pueden trazar varias rectas. Uno se enfrenta a las concepciones que el alumno se ha construido de la recta y del punto en el marco de una geometría de los trazos, en tanto que una concepción correcta requiere de una ruptura con lo real, un trabajo de modelización tal como lo expuso EUCLIDES. Debe agregarse que, en ciertos estadios de su desarrollo, el alumno es incapaz de un trabajo semejante. Al obstáculo epistemológico se añade, pues, un obstáculo de origen ontogénico.

El desarrollo de las ciencias está así caracterizado por periodos de ruptura con los conocimientos antiguos comparable, en cierta medida, con el modelo de apropiación de los conocimientos desarrollado en el marco del constructivismo. Uno puede entonces preguntarse si no es necesario confrontar a los alumnos con ciertos obstáculos epistemológicos que han desempeñado un rol importante en la elaboración de ciertos conceptos. Falta aún determinar cuáles son esos obstáculos y cómo disponer las condiciones escolares del rechazo de las concepciones que los caracterizan.

b) Concepciones de origen didáctico (eje M-S)

Ciertas concepciones están en relación con los dispositivos de enseñanza puestos en práctica, ya sea en el marco del recorte operado en el saber para presentarlo a los alumnos en la escuela, ya sea en el marco de la elección de las situaciones de enseñanza.
Así, la concepción de los decimales como par de enteros puede vincularse a estas dos consideraciones:

- Por una parte, los alumnos que llegan a 4º grado están familiarizados con un solo tipo de números (los números naturales, que son los únicos utilizados hasta allí) y adquieren reglas que tienden a extender a todos los números; por ejemplo: todo número posee un sucesor, entre dos números consecutivos no puede intercalarse ninguno... lo que puede explicar un error como "entre 2,5 y 2,7 sólo está 2,6".

- Por otra parte, las situaciones habitualmente utilizadas para "introducir" los números decimales no pretenden provocar una ruptura con esta concepción, sino que tienden a reforzarla en la medida en que insisten en las "continuidades" entre naturales y decimales: presentación del decimal en relación con el sistema métrico (7,16 es otra escritura de.. 716 cuando se elige el metro como unidad en lugar del centímetro, o incluso una escritura que substituye la escritura compleja 7m 16cm).

La misma observación puede hacerse para los números negativos presentados en relación con las "cantidades ficticias" (deudas...) y que intentan prolongar la concepción de número vinculado a la medida.

Pueden citarse numerosos ejemplos:

- Concepción de la perpendicularidad vinculada a la horizontalidad y a la verticalidad, reforzada por las presentaciones habituales de las figuras características como el cuadrado y el rectángulo.

- El recurso de la división de 74,85 por 0,585 en un problema como "¿cuánto hay que pagar por la compra de 0,585 kg de gruyere a 74,85 $ el kg?" puede relacionarse con la concepción de la multiplicación como operación "que siempre aumenta" y como adición repetida. Se puede imaginar que el alumno que cometió este error rechazó los esquemas aditivos y sustractivos de entrada, luego vaciló entre multiplicación y división y finalmente rechazó la primera en función de la concepción que tiene de ésta.

- En un problema como "12 lápices cuestan $4, ¿cuánto cuesta un lápiz?", algunos alumnos responden calculando 12:4, han reconocido el modelo correcto (a:b), pero no lo han instanciado correctamente, en función de una concepción según la cual el divisor es siempre más grande que el dividendo, heredada de la división en los naturales... y de los ejercicios de entrenamiento propuestos en los manuales sobre la división de los decimales en los cuales rara vez se encuentran divisiones de un número por otro más grande.

- Se puede evocar también la instrumentación en el alumno de algoritmos erróneos, provenientes de reglas generalizadas a partir de algoritmos estudiados antes o que le han permitido tener éxito en la operación: adición de lo que se lleva de las cifras del primer número en la multiplicación (como en la adición) o cálculo de la sustracción de izquierda a derecha (que da el resultado correcto en el caso de la sustracción sin nada para llevar a la columna siguiente; seria pues peligroso hacerla funcionar sola durante mucho tiempo):

```
  2
 34          417
x 7         -238
----        ----
358          289
```

Además, hay que señalar que algunas de estas concepciones encuentran su origen a veces en les experiencias sociales del alumno o son reforzadas por éstas (utilización de los decimales para la moneda, ángulos rectos en el entorno, situaciones más usuales de la división).

2.2.3 Análisis en el marco de las expectativas recíprocas maestro-alumno a propósito de un tipo de tarea determinada: contrato didáctico (eje M-A)

El contrato didáctico puede ser definido como *"el conjunto de los comportamientos del docente que el alumno espera y el conjunto de los comportamientos del alumno que espera el docente. El contrato es, pues, lo que determina explícitamente en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente, aquello de lo que cada parte tendrá que ocuparse y de la que, de algún modo, será responsable ante el otro"* (G. BROUSSEAU). Así, el contrato puede ser descripto por un conjunto de reglas que rigen el funcionamiento de la clase y las relaciones maestro-alumno: ¿qué es lo que realmente se pide? ¿Qué es lo que se espera? ¿Qué está permitido? ¿Qué está prohibido? Estas reglas implícitas son en general válidas para un tipo de tarea determinado (resolución de problemas,

por ejemplo), y son percibidas por el alumno como constantes detectadas en el curso de las actividades que se le proponen (un problema prepuesto al final de un capítulo requiere el empleo de los conocimientos nuevos presentados en este capítulo, por ejemplo).

En este sentido, ciertas respuestas de alumnos enseñan más sobre el contrato que sobre los conocimientos del alumno que las produce. Es el caso, por ejemplo, del ahora célebre problema de la "edad del capitán": "En un barco hay 26 ovejas y 10 cabras. ¿Cuál es la edad del capitán?". Los tres cuartos de los alumnos de 3º grado y alrededor de un tercio de los alumnos de 4º grado responden sumando 26 y 10. Se puede ver funcionar allí algunas reglas del contrato a propósito de la resolución de problemas: todo problema propuesto en clase admite una solución; esa solución se obtiene mediante cálculos que utilizan todos los números del enunciado.

Frente a la respuesta de un alumno, conviene pues preguntarse si el alumno ha respondido correctamente la pregunta planteada o si le respondió al maestro que la formuló.

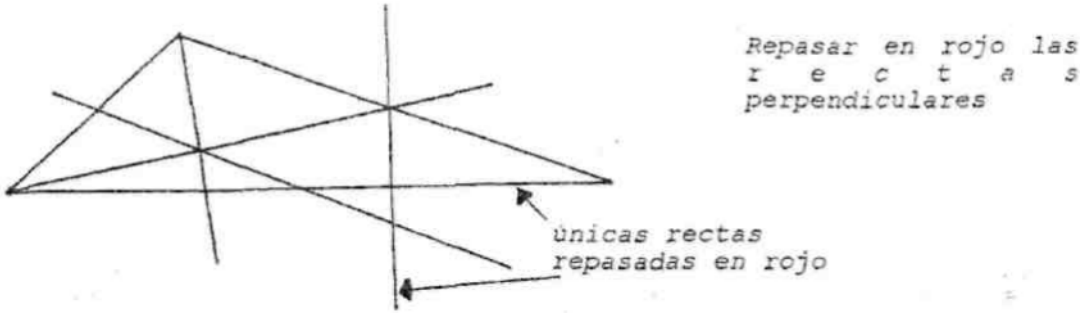
En esta perspectiva, pueden considerarse dos categorías de errores:

✓ **- los que son producidos a partir de reglas del contrato elaboradas por el alumno y que van a funcionar como obstáculos para una representación correcta de la tarea pedida:**

Ejemplos:

- La resolución de problemas, con las reglas ya evocadas o incluso reglas que se apoyan en índices textuales (perder - sustracción...);

- Búsqueda de una sola solución (cuando no se piden explícitamente varias), como en la respuesta siguiente donde esta regla del contrato puede "recortar" una concepción del alumno a propósito del concepto de rectas perpendiculares;



11

✓ **Los que son producidos como consecuencia, de la no apropiación de las reglas especificas a una actividad dada;** el alumno no sabe entonces exactamente lo que el maestro espera de él, como en:

- el pedido de explicaciones para una respuesta o una solución,
- la redacción de la solución de un problema,
- los tipos de argumentación que son lícitos para una demostración,
- el grado de precisión exigido en las construcciones geométricas.

III - TERCERA ETAPA: PUESTA EN PRÁCTICA DE UN DISPOSITIVO PARA TESTEAR LAS HIPÓTESIS PRECEDENTES

Como acabamos de verlo, pueden formularse muchas hipótesis en cuanto al proceso que el alumno ha puesto en práctica para cometer un error. Es muy. difícil que con las informaciones de que disponemos (que, por supuesto, son función de la situación en la cual hemos recolectado los errores) tengamos todos los elementos necesarios para decidirnos por alguna. Por lo que a menudo **es** necesario obtener nuevas informaciones de los alumnos.

Para recolectarlas, pueden utilizarse diferentes herramientas: un test, una observación de alumnos a los que se les propone una actividad específica, un diálogo (por ejemplo un "diálogo de explicitación" cf. 5-2) con **el** alumno para ayudarlo a explicitar los procesos puestos en juego en la producción del error. Es claro que estas herramientas se elaboran en función de las hipótesis que se formulen. Es de notar que una detección sistemática de ciertos errores característicos para cada alumno puede aligerar este dispositivo.

IV - CUARTA ETAPA: ¿DEBEN REMEDIARSE ESTOS ERRORES?

Esta pregunta puede sorprender en la medida en que una respuesta afirmativa puede parecer evidente a muchos **de** nosotros. Pero la respuesta que se propone a esta pregunta es función de nuestra concepción del aprendizaje: si estimamos que el error es nefasto para cualquier aprendizaje, si estimamos que el error deja huellas indelebles, entonces la respuesta es evidente. Si, por el contrario, consideramos que ciertos errores son pasajes útiles para la adquisición de ciertos conceptos, nuestra respuesta será más matizada. _

En este último caso, nuestra respuesta va a ser función de tres tipos de parámetros:

- ✓ **Parámetros vinculados a la tarea propuesta:**

- ¿La tarea durante la cual el alumno ha proporcionado una respuesta errónea es pertinente respecto de los objetivos a los que apunto, respecto de las exigencias del programa, respecto de lo pre-adquirido de los alumnos? En el caso de una respuesta negativa, la remediación es inútil; es la tarea lo que debe ponerse en tela de juicio. Por ejemplo, si un alumno no domina la división de un número de 4 cifras por un número de 3 cifras en 4º grado, ¿es verdaderamente necesario poner en práctica situaciones de remediación?
- ¿El enunciado tal como es propuesto a los alumnos no induce errores? Es este ciertamente el caso para el ítem 26 de la prueba de evaluación de 6º de 1989. (Véase anexo). La presencia del cuadro de fórmulas de áreas al principio, del enunciado y el hecho de que la primera pregunta se refiera a **un** cálculo de perímetro ha sido, por cierto, la causa de numerosos errores.

- ✓ **Parámetros vinculados al saber:**

- Cuáles son las consecuencias de este(os) error(es) para la posterior evolución del curso de matemáticas o de otras disciplinas (¿será un obstáculo para la apropiación por el alumno de nuevos conocimientos?) o para el uso de ciertos conceptos en la vida cotidiana. Por ejemplo, si un alumno comete errores en el marco de la resolución de problemas simples en "una operación" en 6°, este alumno tendrá ciertamente enormes dificultados para lo que quede del curso. En ese caso, se impone una remediación. Así como un alumno que, al final del 2° áño secundario, no domina los porcentajes corre el riesgo de encontrar dificultades en la vida cotidiana.

El estudio de las consecuencias de un error es facilitado por un análisis del (los) concepto(s) en juego detrás de este error. Entre otras cosas, se hace

necesario definir el **campo conceptual** al que pertenece ese o esos concepto(s)[2] de análisis histórico del (los) concepto(s) puede facilitar la definición de ese campo: "¿qué situaciones históricas han hecho necesario ese concepto?"

- ¿Los conceptos en juego detrás de un(os) error(es) serán reestudiados o enriquecidos más tarde? En el caso de una respuesta positiva, no es forzosamente necesario remediar ese (esos) error(es); el enriquecimiento de esos conceptos podrá ser para el alumno la ocasión de redescubrirlos en situaciones nuevas, en nuevos marcos (Douady, 1986) y por lo tanto de remediar (espontáneamente) ciertos errores. Es el caso, tal vez, de los errores referidos a la proporcionalidad o las fracciones en 6º y 7º grado.

- ¿El estudio de un nuevo concepto no va a ayudar al alumno a remediar ciertos errores[3]? Este puede ser el caso para el estudio de la simetría ortogonal que puede ayudar al alumno a remediar ciertos errores sobre el trazado y reconocimiento de rectas perpendiculares.

Por supuesto, este estudio corre el riesgo de ser influido por la concepción que cada uno de nosotros tiene de los conceptos que enseñamos (eje M-S). Aquí intervienen fenómenos de transposición didáctica (CHEVALLARD, 1985; ARSAC et al; **1989).**

✓ Por último, hay un tercer tipo de parámetros vinculados a la **situación de enseñanza en la cual** nos **encontramos:**

- ¿Cuántos alumnos cometen ese error? Si hay pocos alumnos, a menudo estaremos tentados de no remediarlo. Lo que plantea un grave problema ético si el error acarrea consecuencias, para el alumno, para la continuación del aprendizaje.

- ¿Tengo tiempo de aportar un remedio a estos errores?

- ¿Cuál es el nivel de mi clase? Aportar una respuesta a esta pregunta supone, por cierto, la búsqueda de Índices objetivos. Para clases de 6o o 3o grado, la comparación de las respuestas de nuestra clase a la prueba de evaluación 3o o 6° grado - 6o respecto de la muestra nacional puede aportar índices objetivos[4]

- La antigüedad del comienzo de los aprendizajes de las nociones en juego también interviene (N. Milhaud, 1980). Así, sobre errores referidos a conceptos cuyo comienzo de aprendizaje lleva ya tiempo, tendremos tendencia quizá a no poner en práctica dispositivos de remediación, ¡pues estimaremos que ya no hay nada que hacer!

Así, podemos encontrarnos frente a un dilema: por un lado, podemos pensar que un error va a ser fuente de obstáculo para los alumnos y por el otro considerar que no hay tiempo de aportarle remedio: ¡el tiempo de enseñanza no es el mismo que el del aprendizaje!

En todos los casos, entre todos los errores cometidos por nuestros alumnos, hay

[2] Vergnaud define un campo conceptual como "un espacio de problemas o de situaciones problemas cuyo tratamiento implica conceptos y procedimientos de varios tipos en estrecha conexión". (1981)

[3] Podría pensarse también que ciertos errores son obstáculos para el enriquecimiento o la adquisición de un concepto (véase más arriba)

[4] En Francia, 3º grado termina un ciclo y 6º es el inicio de otro nivel de escolaridad (colegio).

que elegir aquellos para los cuales se desea poner en práctica actividades de remediación, puesto que de todos modos no se pueden remediar todos los errores de todos los alumnos. Hay que elegir también los alumnos para los cuales se ponen en práctica tales actividades. Si no son todos los alumnos de la clase y si la remediación tiene lugar durante el curso, hay que encarar actividades diferenciadas en la clase.

V - QUINTA ETAPA: ELABORACIÓN DE UN DISPOSITIVO DE REMEDIACION

Hablamos de dispositivo más que de situaciones porque pensamos que no son algunas actividades aisladas las que les permitirán a los alumnos remediar sus errores sino más bien un encadenamiento de situaciones. **La elaboración de un dispositivo de remediación supone, es claro, la elección de las actividades, pero también la de cierta gestión de estas actividades.** Estas elecciones son directamente función del análisis precedente y de nuestra concepción de la enseñanza.

Por ello, vamos a retomar los diferentes orígenes presentados en la 2ª parte de este documento y proponer algunas pistas de remediación para cada una.

5.1 Errores vinculados a las características del alumno

5.1.1 Limitación del sujeto en un momento de su desarrollo

En el caso en que se considere que ciertos errores están vinculados al hecho de **que** el alumno no ha alcanzado cierto estadio de desarrollo o no domina, o no completamente, ciertas operaciones intelectuales generales (reversibilidad, etc.) o que **no** ha estructurado correctamente el tiempo y **el** espacio, actividades tales como las propuestas por Jean-Marie DOLLE y su equipo de psico-genetistas pueden ser situaciones de remediación posible (J.-M. DOLLE, 1990). Puede mirarse también del lado del "Enriquecimiento instrumental" o de los "ARL" (Ateliers de Raisonnement Logique -talleres de razonamiento lógico)... (Véase "Apprendre peut-il s'apprendre?" de la revista Education Permanente, n° 88, 89). Estas diferentes técnicas de remediación apuntan a intervenir en el nivel de las estructuras de la inteligencia independientemente de todo contenido de aprendizaje, lo que marca los límites de este tipo de remediación.

5.1.2 Limitación de la carga de trabajo

Estudios de psicología muestran que el palmo mnésico muy difícilmente puede ser mejorado; por el contrario, es posible **aliviar la carga de trabajo ayudando a los niños a construirse automatismos:** técnicas operatorias, reconocimiento de figuras geométricas, lectura, etc., o **a organizar mejor su trabajo** (anotar elementos importantes).

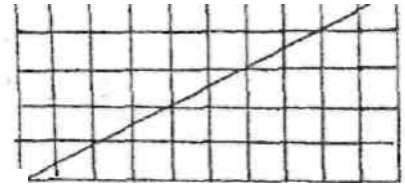
Pero atención: ayudar al alumno a construirse un automatismo concerniente a ciertos conceptos no conduce inmediatamente a dar sentido a esos conceptos, pues el automatismo le permite al alumno "economizar espacio" en la memoria de trabajo justamente evitándole un retorno al sentido. Para facilitar la instrumentación de automatismos, pensamos por supuesto en los ejercicios progresivos y repetitivos, del tipo ejercicios de factorización de desarrollo, cálculos, construcción de figuras... Pero el exceso de este tipo de actividades presenta cierto número de inconvenientes:

- El alumno va a tener **dificultades para transferir sus automatismos** porque fueron adquiridos en un contexto bien determinado respecto del cual el alumno ha detectado cierto número de indicios. Si vuelve a encontrar esos indicios en un problema o ejercicio, hará funcionar el automatismo correspondiente sin ningún control: llamaremos a estos indicios "indicios desencadenantes". El problema es que no son forzosamente indicios pertinentes, lo que puede tener diversas consecuencias que rápidamente vamos a

repasar:

Eso puede llevar al alumno a movilizar sus automatismos (eventualmente adaptándolos) a un dominio en el cual no son eficaces. Es por ejemplo lo que ocurre con el siguiente problema:

Determinar el número de cuadrados atravesados por la diagonal en función del número de cuadrados del largo y el ancho.



Hay alumnos que hacen la diferencia entre el área y el perímetro del rectángulo y creen haber resuelto el problema. El rectángulo cuadriculado ha desencadenado en ellos el automatismo del cálculo del área, y luego el del cálculo del perímetro.

Es lo que ocurre también en este error: si $(2x + 3)(x + 1) > 0$ entonces $2x+3>0$ $x + 1 > 0$. O también cuando el alumno utiliza el procedimiento de "llevarse x" en el cálculo de productos del mismo modo que en el cálculo de sumas.

- El hecho de que los "indicios desencadenantes" no sean los indicios pertinentes puede también conducir el alumno a no movilizar un automatismo porque no reconoce, en la tarea que se le propone, sus "indicios desencadenantes". Por ejemplo, para el problema (citado anteriormente): para llevar a los alumnos a dar un paseo, se hacen venir autobuses; en cada uno de ellos hay 30 lugares; son 112 los alumnos que van a pasear. ¿Cuántos autobuses hay que prever?". Pocos niños de 3º grado movilizan la división[5] pues los indicios desencadenantes habituales de esta operación no están presentes: reparto, partes...

- El exceso de ejercicios de entrenamiento repetitivos puede estar también **en la base** de **dificultades con que el alumno se enfrenta para volver a encontrar el funcionamiento de un automatismo que ha olvidado.** Es lo que ocurre por ejemplo cuando el alumno, frente a una expresión del tipo $a^3 x a^4$ nos pregunta si hay que sumar o multiplicar los exponentes.

- Estos ejercicios repetitivos pueden también **inducir en el alumno una regla del contrato** según la cual resolver un problema es encontrar una receta o un algoritmo directamente utilizable.

- Por último el exceso de este tipo de ejercicios puede ser un obstáculo para el autocontrol de la pertinencia del uso de un automatismo.

Esto no significa, con todo, que para la adquisición de conceptos no sean necesarios ejercicios de aplicación inmediata; por el contrario, puesto que, como acabamos de decirlo: permiten la adquisición de automatismos indispensables para aliviar la carga de trabajo. **Pero** hay **que elegir con discernimiento los automatismos que se desean hacer adquirir a los alumnos** y analizar los ejercicios que se proponen de manera de evitar que, a través de estas actividades, el alumno encuentre indicios desencadenantes no pertinentes. Por lo tanto, hay que ayudar a los alumnos a detectar los "indicios pertinentes" de un automatismo, entre otras cosas deslizando en el medio de ejercicios repetitivos ejercicios "con trampa" en los cuales el automatismo no funciona. Finalmente,

[5] salvo si este problema es planteado durante el estudio de la división, pero en ese caso el alumno moviliza la división únicamente en referencia con la regla del contrato: "para resolver un problema se utiliza la última noción estudiada".

estos ejercicios deben venir después de las actividades que le han permitido al alumno dar sentido a los conceptos en juego, o ser acompañados por tales actividades.

5.1.3 Errores vinculados a dificultades que el alumno encuentra para construirse una representación de un problema, para movilizar una estrategia de resolución, para autocontrolarse

Hemos visto anteriormente (cf. 2-2-1 b), ej. 2) que, para resolver un problema, el alumno es llevado en un primer momento a construirse una representación del problema a partir de indicios que detecta en el enunciado y que almacena en su memoria a corto plazo. Luego construye una estrategia de resolución del problema a partir de experiencias escolares y sociales que están almacenadas en su memoria a largo plazo, en forma de problemas de referencia, de esquemas generales de procedimientos[6], o de reglas de contrato didáctico. Finalmente pone en práctica esa estrategia para obtener el resultado del problema.

A lo largo de estas diferentes etapas, puede ser llevado a utilizar procedimientos de control: control de la representación del problema, control., de la elección de la estrategia, control de la ejecución de la estrategia, control del resultado hallado.

En el curso de este proceso, el alumno puede encontrar dificultades. Vamos a repasarlas y proponer para cada una de ellas caminos de remediación.

- **Dificultad en el nivel de la construcción de una representación adecuada del problema.** Los orígenes de esta dificultad pueden ser diversos:

- **La saturación de la memoria a corto plazo** (cf. 2-2-1, ej. 2). Esta saturación puede deberse al hecho de que la actividad de desciframiento no esté automatizada. En este caso la remediación se refiere evidentemente a la lectura. Esperando progresos en este sentido, se puede leer una o varias veces el enunciado ante el alumno evitando, por supuesto, insistir sobre los indicios pertinentes.

La saturación de la memoria a corto plazo puede deberse también al hecho de que el alumno no logra discernir los indicios pertinentes del problema. Se le puede pedir entonces al alumno que dibuje la situación. .Esta representación en imágenes disminuye la carga de trabajo del alumno (cf. J.F. Richard, p. 13). Atención: es el alumno quien debe ejecutar el dibujo, no el docente: en efecto, la realización de un dibujo obliga al dibujante a seleccionar indicios en el enunciado; si es el docente quien lo ejecuta, es claro que seleccionará los indicios pertinentes, e impedirá así al alumno efectuar ese trabajo capital para la construcción de una representación del problema. Se puede; pedir también al alumno que cuente el enunciado. La expresión oral puede ayudarlo a memorizar mejor ciertos indicios del enunciado. Si esto no basta para desbloquear la situación, se pueden materializar ciertos elementos del problema (en el caso en que sea posible, por supuesto).

- **La. pregnancia de ciertas reglas del contrato didáctico** también puede estar en el origen de dificultad en el nivel de la construcción de una representación adecuada del problema, en la medida en que algunas de estas reglas (por ejemplo "Todo problema tiene una solución y para encontrarla basta con hacer la operación que se está estudiando con los números del enunciado") pueden llevar al alumno a resolver el problema tomando en cuenta únicamente los indicios numéricos sin entrar en el sentido del problema. La remediación en ese caso consiste en "romper" esas reglas (cf. 5-3).

- **Dificultad en el nivel de la construcción de una estrategia de**

[6] Se trata de procedimientos en parte descontextualizados, que pueden adaptarse a gran cantidad de problemas (HOC, p. 42).

resolución del problema[7]**:** el origen de esta dificultad está en remitir ya sea a la dificultad para el alumno de recuperar de su memoria a largo plazo procedimientos o problemas de referencia, o bien en la insuficiencia de las experiencias escolares y sociales almacenadas en la memoria a largo plazo. En este último caso hay que permitirle enriquecer su stock de procedimientos y de problemas de referencia. Aquí deben considerarse diversos caminos de remediación: en primer lugar debemos ser cuidadosos en cuanto a la elección de los problemas que les proponemos a los alumnos; deben cubrir el mayor campo posible de procedimientos. Pero también debe realizarse un trabajo, una vez que se ha resuelto el problema, ya sea para que se convierta en problema de referencia para los alumnos, ya sea para que los ayude a implementar un esquema general de procedimiento, o para que facilite la puesta en relación de esquemas generales de procedimientos. Para ello, se puede ayudar a los alumnos a tomar distancia respecto de la actividad de investigación: "¿Qué es lo que les ha permitido resolver el problema? ¿Qué método utilizaron? ¿Qué **los** llevó a utilizar ese método? ¿Qué fue un obstáculo para ustedes? ¿Ya habían resuelto problemas del mismo tipo?". El trabajo de **narración del proceso de investigación** que propone A. Chevalier puede ayudar también a los alumnos a tomar distancia respecto de la actividad de investigación. En el marco de tareas para el hogar, ella les pide a sus alumnos: *"Cuente lo mejor posible todas las etapas de la investigación, anexando los borradores, si es necesario, y, si puede hacerlo, precise cómo le aparecieron nuevas ideas"* (A. CHEVALIER, 1990). También se puede pedir a los alumnos que inventen enunciados de problemas que conduzcan a un método de resolución análogo.

Es preciso señalar que a veces encontramos alumnos que se han construido una representación correcta del problema, que imaginan una estrategia correcta pero que están persuadidos de que van a equivocarse en la ejecución porque no dominan bien una operación. Prefieren entonces cambiar de estrategia. En ese caso, la posibilidad de utilizar la calculadora puede desbloquear la situación; la remediación se sitúa en el nivel de las técnicas operatorias.

- **La dificultad puede situarse en el nivel de la ejecución de la estrategia.** En ese caso el origen de esta dificultad debe buscarse ya sea en el nivel de la gestión de una estrategia compleja, lo que puede suponer una ayuda a la organización o un trabajo en sub-grupo de dos alumnos, ya sea en **el** nivel de las técnicas operatorias.

En todos los casos, frente a un error en el nivel de la resolución de problema hay que poder situarla respecto de las diferentes etapas presentadas más arriba: ¿se trata de una dificultad en el nivel de la construcción **de la** representación del problema o de una dificultad en el nivel de la elección de una estrategia o de la ejecución de la estrategia? Es bien claro que, según la respuesta que ofrezcamos, las remediaciones **no** serán las mismas. Es necesario, pues, una interrogación del alumno para poder responder a las preguntas anteriores. Aquí parece importante que el alumno tome conciencia de la representación que se ha construido del problema (y en particular **del** objetivo a alcanzar), de la estrategia que ha elegido y de **los** criterios que han orientado esa elección. Para ello, una interrogación del tipo "diálogo de explicitación" puede ser útil. (cf. 5-2).
Finalmente, parece deseable desarrollar en los alumnos herramientas de autocontrol de su representación, de la ejecución de la estrategia y del resultado encontrado. Este trabajo suele descuidarse sin duda porque es difícil de "enseñar".

5.1.4 Errores vinculados a la representación que un alumno tiene de las matemáticas y de sí mismo en tanto matemático

[7] En este caso suponemos que el alumno se ha construido una representación adecuada del problema.

Se trata aquí de ayudar al alumno a que tome conciencia de que en matemática él puede hacer algo. Para ello, por supuesto, se puede valorizar los trabajos que realiza correctamente pero se puede también proponer cada tanto a la clase problemas abiertos (Arsac et al., 1988). Recordemos que el objetivo de. estos problemas es permitirle al alumno poner en marcha una verdadera operación científica: ensayar, conjeturar, testear, probar. Estos problemas son concebidos de tal suerte que todos puedan comprometerse en esa operación de investigación y que por ende todos puedan intentar y conjeturar. Muy a menudo se observa que alumnos aparentemente desmovilizados respecto de las matemáticas encuentran sorprendentes momentos de gran motivación y que lleva a veces a algunos de ellos a cambiar su representación de las matemáticas.

5.1.5 Errores vinculados a la representación que un alumno tiene de la escuela

En ese caso, debe considerarse un trabajo de tutorado pero también un trabajo con los padres. Suelen ser ellos quienes están desmovilizados respecto de la escuela, quienes viven mal el fracaso de sus hijos... Actualmente, en el marco de proyectos de establecimientos, entre otros entre ciertos establecimientos en "ZEP", se instrumentan experiencias para intentar volver a establecer contacto con los padres (por intermedio de educadores de barrio y de asistentes sociales) para llevarlos a cambiar su propia representación de la escuela.

5.2 Errores vinculados a las concepciones del alumno

En este caso, hay que ayudar al alumno a que tome conciencia de la insuficiencia de sus concepciones[8] y a hacerlas evolucionar. La estrategia consiste en llevar al alumno a la toma de conciencia de una contradicción entre una anticipación y una desmentida. Esta desmentida puede ser aportada por los demás (situaciones de conflictos sociocognitivos), o bien por la "respuesta" aportada por la situación a la que se enfrenta el alumno, como consecuencia de su acción (situaciones de conflictos cognitivos). Si esta contradicción provoca un conflicto interno, que puede ser fuente de desequilibrio cognitivo, lo que puede llevar al alumno a construir una nueva concepción para suprimir la contradicción precedente. Toda la dificultad consiste en llegar a provocar esta contradicción[9], y un conflicto cognitivo interno. Pueden emplearse varios métodos:

- **El diálogo de explicitación:** El objetivo de este tipo de diálogo es de llevar al alumno a tomar conciencia de los procesos que ha implementado para producir un error (o más generalmente para resolver un problema). Ya hemos hablado de este método para validar (o invalidar) el análisis que hacíamos de errores de alumnos. Hemos podido comprobar, utilizando este método, que a menudo los alumnos, explicitando su propia operación, toman súbitamente conciencia de una contradicción. Este tipo de diálogo no es fácil • de conducir porque a menudo nos vemos tentados de llevar al alumno a que produzca la respuesta correcta más que a tratar de saber cómo produjo su error. En ese caso, el alumno corre el riesgo de volver a entrar en un juego cuyo único objetivo es de lograr decir lo que el profesor espera; no puede, pues, tomar conciencia de contradicciones cognitivas internas puesto que no trabaja más que al nivel de la decodificación de la situación de entrevista en la que está. Pierre VERMESCH definió algunas reglas simples[10] para facilitar la interrogación, por ejemplo evitar los "por qué", evitar las preguntas de opciones múltiples que van a llevar al profesor a hablar mucho más que el alumno, ayudar al alumno a evocar realmente...

- La **entrevista de tipo clínico:** el objetivo del docente es provocar un

[8] Ya sea porque conducen a un resultado reconocido como falso por el alumno o a un método demasiado pesado

[9] Se trata de una contradicción que debe ser percibida por el alumno; puede ocurrir perfectamente que el experto vea una contradicción entre una anticipación hecha por el alumno y el resultado encontrado sin que por ello este último la vea

[10] Simples de enunciar pero no forzosamente simples de implementar (artículo en Psychologie francaise. número especial, febrero de 1991)

conflicto en el alumno entre una anticipación y un resultado producido. Aquí también el docente debe permanecer vigilante. A lo largo, de la entrevista, debe asegurarse de que el alumno trabaje en el nivel de sus concepciones y no en el nivel de la decodificación de la situación (cf. J.M. DOLLE)

- **Implementación de conflictos sociocognitivos:** Se trata en este caso de crear interacciones entre los alumnos. El conflicto puede referirse, por ejemplo, al resultado de un problema donde cada uno puede explicitar las razones por las cuales piensa que su resultado es justo. Esto permite así a los alumnos explicitar sus propias concepciones y confrontarlas a otras y crear por ende conflictos que pueden volverse internos. La dificultad de esta., técnica reside en el hecho de que los conflictos pueden permanecer únicamente en el nivel social: "De todos modos tú nunca has comprendido nada de matemáticas, por lo tanto estás equivocado", "tengo razón porque tengo mejor, promedio que tú en matemáticas". Debe realizarse un trabajo en el nivel de. la constitución de los grupos pero también en el nivel de la gestión de.la clase, entre otras cosas hay que reflexionar sobre lo que se quiere poner en juego para incitar a los alumnos a suprimir sus contradicciones, (cf. G. MUGNY, 1985 y diversos artículos en N. BEDNARZ et al., 1989).

- **Implementación de situaciones problemas:** Recordemos que se trata de situaciones que permiten al alumno investir sus concepciones sobre una noción dada y tomar conciencia de su insuficiencia, porque los resultados obtenidos son contradichos por la situación misma. Por ejemplo, para hacer fracasar la pregnancia del modelo aditivo en los problemas de agrandamiento se propone a los alumnos reunidos en grupo un puzzle formado de 4 piezas que hay que agrandar: se precisa solamente que una pieza, una de cuyas dimensiones es de 4 cm por ejemplo, debe tener 6 cm en el puzzle agrandado. Cada alumno debe construir una pieza y luego por grupo los alumnos intentan reconstituir el puzzle. Los alumnos, por supuesto, agregan espontáneamente 2 a todas las dimensiones; es en el momento en que intentan reconstituir el puzzle agrandado cuando toman conciencia de una contradicción. La desmentida les es provista por la situación, sin que el profesor ni los demás alumnos tengan necesidad de intervenir, (sobre este tema véase ARSAC et al., 1988; BROUSSEAU, 1980; CHARNAY, 1988; DOUADY, 1986; ERMEL, 1973).

Es de notar que las actividades del tipo de las descriptas por Britt-Mari Barth (1987) pueden facilitar la apropiación de conceptos "clasificadores" tales como los de "cuadrado", "rombo", "prisma", "recta perpendiculares"... Recordemos que se trata de ayudar al alumno a detectar los **atributos esenciales** de un concepto presentándole ejemplos "positivos" y "negativos" de ese concepto, y luego pidiéndole crear tales ejemplos.

Señalemos finalmente que las concepciones de alumnos cuyo origen es didáctico (cf. 2-2-b)) deben incitarnos a llevar a cabo un trabajo hacia atrás que consista en cambiar las actividades que proponemos para introducir conceptos.

5.3 Errores vinculados a las reglas del contrato didáctico

✓ **Reglas** que **son fuente de errores:** Se trata en principio de detectarlas y luego ayudar a los alumnos a romper con ellas o más precisamente ayudarlos a clarificar su dominio de validez. He aquí algunos ejemplos de estas reglas:

- Todo problema tiene una solución.
- Para resolver un problema hay que utilizar las últimas nociones estudiadas.
- Para resolver un problema hay que utilizar todos los datos.

Estas reglas son tanto más pregnantes cuanto que tienen un dominio de validez a menudo muy vasto.

Para ayudar a los alumnos a romper con estas reglas, se debe encontrar actividades para las cuales van a investir estas reglas y tomar conciencia de que éstas producen resultados falsos: para ello se pueden utilizar problemas abiertos, problemas **sin** preguntas, problemas para los cuales faltan datos.

- **Reglas no apropiadas por el alumno:** En este caso, se trata por el contrario de ayudar a los alumnos a apropiarse de estas reglas. La **«valuación formadora** parece ser una técnica que puede facilitar esta apropiación. Se trata en principio de clarificar nuestros propios criterios de éxito de una tarea (esto no siempre es fácil, por ejemplo: ¿cuáles son los criterios que caracterizan una buena redacción de demostración?). Luego, con ayuda de tareas con errores (es decir, tareas que comportan cierto número de errores), los alumnos, luego de un trabajo en grupo, establecen lo que se llama una carta de estudio (NUNZIATI, 1990). La descripción de una actividad cuyo objetivo es ayudar a los alumnos a apropiarse de los criterios de una buena redacción de un deber y que se emparenta con esta técnica figura en **el** boletín APM n° 367 (MANTE, 1988).

5.4 Gestión de las actividades de remediación

La gestión de estas actividades puede ser muy diversa:

.Dónde pueden tener lugar estas actividades:
- ¿en el aula?
- ¿fuera del aula?.
- ¿en la escuela (grupos de necesidades, grupos de nivel, SOS matemáticas, taller, etc.?
- ¿en la casa?

. Para quién: ¿para todos los alumnos de la clase?,¿para algunos alumnos?
. Qué organización **en** el tiempo: ¿Se trata de actividades puntuales? ¿De actividades propuestas regularmente a lo largo del año?
. Cómo: ¿todos los alumnos tienen las mismas actividades o las actividades son individualizadas o semi-individualizadas (las mismas actividades para un grupo de alumnos)? ¿En grupos homogéneos o heterogéneos?
.¿Cuál será el rol del profesor? ¿Se favorecen los conflictos sociocognitivos?

En todos los casos, es necesario realizar a priori un análisis de las situaciones formulándose entre otras las dos preguntas siguientes:

. ¿Qué van a hacer los alumnos frente a esta situación?
. ¿Esta situación es pertinente respecto de los objetivos a los que apunto?

Por último, nos parece importante establecer **un contrato con el alumno** que precise sobre qué errores va a trabajar y la duración de ese trabajo.

VI - EVALUACIÓN DEL DISPOSITIVO DE REMEDIACION

En cuanto al alumno, se trata de ayudarlo a que tome conciencia de los progresos que realiza. En cuanto al docente, se trata de saber si el alumno ha modificado sus procedimientos y sus respuestas y por lo tanto si el dispositivo de remediación es operacional. Si no es éste el caso, se trata entonces de darse medios para retomar el análisis de errores o de concebir otras situaciones de remediación.

VII - CONCLUSIÓN: APRENDER DE LOS PROPIOS ERRORES

Somos conscientes de no haber agotado un tema tan amplio y complejo, que se sitúa en el centro del aprendizaje. Entre otras cosas, los caminos de

remediación deben ser profundizados, desarrollados. En particular, las cuestiones de organización de las actividades en la clase y en la escuela merecen un trabajo particular. En la escuela primaria, la implementación de ciclos puede ser una ocasión propicia para reflexionar sobre estos asuntos.

El apoyo sobre una concepción constructivista y sistémica del aprendizaje nos ha permitido ir mucho más lejos de lo que habríamos podido apoyándonos sobre una concepción "empirista" o conductista. Pero si, come lo suponen las hipótesis constructivistas, el aprendizaje pasa por un tiempo en que se ven fracasar las concepciones que se revelan insuficientes o no adecuadas para el educando, esto implica, pues, que el aprendizaje pasa por momentos de duda, de desestabilización... Ahora bien, no todos los alumnos están dispuestos tal vez a pagar este precio. Como lo precisa S. Bolmare: *"...el camino del conocimiento que se ve esencialmente como una fuente de progreso provoca miedo en esos niños, y lo evitan porque está lleno de riesgos para su equilibrio psíquico, que mantienen de manera precaria."* Los niños de los que habla son aquellos que, como él lo escribe, tienen *"ansias de saber, pero miedo de aprender";* y que forman parte de la franja del 20% de nuestros alumnos que fracasan. En ese caso la remediación debe tomar en cuenta su dificultad psíquica. Más fácil de decir que de hacer cuando ni la didáctica ni la pedagogía son de gran ayuda.

El análisis de errores y la remediación es un campo de investigación muy ampliamente abierto donde las preguntas son mucho más numerosas que las respuestas. Pero nos parece que el hecho de considerar el error no como una falta o una insuficiencia, sino como el resultado de un proceso que tiene una coherencia, puede ayudar al alumno a cambiar su representación del error, puede ayudarlo a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores; lo que nos parece capital, nosotros mismos, docentes, podemos aprender mucho de los errores de nuestros alumnos.